

# שיטות מתמטיות בכלכלה

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & \omicron & \pi \\ \wp & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

## סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)  
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: [www.GooL.co.il/linearit.html](http://www.GooL.co.il/linearit.html)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



## תוכן

5	פרק 1 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות
11	פרק 2 - מטריצות
18	פרק 3 - דטרמיננטות
24	פרק 4 - משוואות מסדר ראשון
24	פרק 4.1 - משוואות הנתנות להפרדת משתנים
25	פרק 4.2 - משוואות הומוגניות
27	פרק 4.3 - משוואות מהצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$
28	פרק 4.4 - משוואות מדויקות
29	פרק 4.5 - הפיכת משוואה לא מדויקת למשוואה מדויקת (גורם אינטגרציה)
31	פרק 4.6 - משוואה לינארית
32	פרק 4.7 - משוואת ברנולי
33	פרק 4.8 - משוואת ריקטי
34	פרק 4.9 - משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה
35	פרק 5 - משוואות לינאריות מסדר שני
35	פרק 5.1 - משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה)
36	פרק 5.2 - משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים
37	פרק 5.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים
38	פרק 5.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים
39	פרק 5.5 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - שיטה אופרטוריות
40	פרק 6 - משוואות לינאריות מסדר $n$
40	פרק 6.1 - משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים
42	פרק 6.2 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים
43	פרק 6.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים
44	פרק 6.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - שיטות קצרות/אופרטוריות
45	פרק 7 - מערכת משוואות לינאריות
45	פרק 7.1 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון מטריצות
46	פרק 7.2 - מערכת מסדר ראשון, הומוגנית, במקדמים קבועים - שיטת הליכסון
48	פרק 7.3 - מערכת מסדר ראשון, לא הומוגנית, במקדמים קבועים - וריאציית הפרמטרים
50	פרק 7.4 - מערכת לא הומוגנית במקדמים קבועים - שיטת החילוץ
51	פרק 8 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון
52	פרק 9 - מרחבי מכפלה פנימית ומרחביים נורמיים
53	פרק 10 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים
53	עקומות שוות ערך
54	נגזרות חלקיות
56	פרק 11 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים
56	פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות
57	שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)

57	פתרונות
58	פרק 12 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)
59	פתרונות
60	פרק 13 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')
60	פונקציות של שני משתנים
61	פתרונות
62	פרק 13 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')
62	פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ
62	פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים
63	פתרונות

## פרק 1 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll} x + y = 3 & (4) & 2x + y = 3 & (3) & x - 4y = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - y = 0 & & x - y = -1 & & 2x - 2y = 0 & \end{array}$$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} x = 3 & (4) & 2x + y + z = 3 & (3) & x - 4y + z = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - z = 0 & & x - y = -1 & & 2x - 2 = 0 & \\ z + t = 8 & & & & x + y + z = 5 & & x + y = 3 & \end{array}$$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} (3) & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} (2) & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} (1) \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} (3)$$

(5) א. הסבר והדגם את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.

ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}^{(*9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$F=\square$  ,  $F=\square$

\* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה  $\square$  ופעם מעל השדה  $\square$ .

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$\begin{array}{l} 8x - 4y = 10 \quad (3) \\ -6x + 3y = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x + 8y = 20 \quad (2) \\ 3x + 6y = 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \quad (1) \\ 5x - 4y = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \quad (6) \\ 4x + 6y + 16z = 8 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -11 \quad (5) \\ 2x + 3y - z = -5 \\ 3x + y - z = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \quad (4) \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \quad (9) \\ -9x + 6y = -3 \\ 6x - 4y = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x - 7y = 0 \quad (8) \\ 8x - 14y = 2 \\ -16x + 28y = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 3y = 2 \quad (7) \\ 2x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 2 \quad (12) \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ 2x + 8y + 12z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \quad (11) \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2y - 3z + 2t = 2 \quad (10) \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t = 8 \end{array}$$

(7) מצא לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x + 2ky + z = 0 & (3) & x + ky + z = 1 & (2) & x - y + z = 1 & (1) \\ 3x + y + kz = 2 & & x + y + kz = 1 & & 5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 & \\ x + 9ky + 5z = -2 & & kx + y + z = 1 & & 3x - y + (k + 3)z = 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x + ky + 3z = 2 & (6) & kx - y = 1 & (5) & 2x - y + z = 0 & (4) \\ kx - y + z = 4 & & (k - 2)x + ky = -2 & & x + 2y - z = 0 & \\ 3x + y + (2 + k)z = 0 & & (k^2 - 1)z = 9 & & 5x + (1 - k)y + k^2z = 1 & \end{array}$$

(8) מצא לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} 3x + 4y - z = 2 & (3) & 2x - 3y + z = 1 & (2) & 2x + ky = 3 & (1) \\ kx - 2y + z = -1 & & 4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k & & (k + 3)x + 2y = k^2 + 5 & \\ x + 8y - 3z = k & & & & 6x + 3ky = 7k^2 + 2 & \\ 2x + 6y - 2z = 0.5k + 1 & & & & & \end{array}$$

(9) מצא לאילו ערכים של  $a$  ושל  $b$  (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x + y - z + t = 1 & (3) & 2x + 4y + az = -1 & (2) & x + 2y - 4z = b & (1) \\ ax + y + z + t = b & & x + 2y + 4z = -4 & & 7x - 10y + 16z = 7 & \\ 3x + 2y + at = 1 + a & & x + 2y - 4z = 0 & & 2x - ay + 3z = 1 & \\ x + 2y + 6z = -2b & & & & & \end{array}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות:

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2$$

$$bx + cy + dz = 3$$

א. מצא תנאי עבור  $a, b, c, d$  כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור  $b, c, d$  כך שלכל  $a$  למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל השדה  $\mathbf{F}$ .

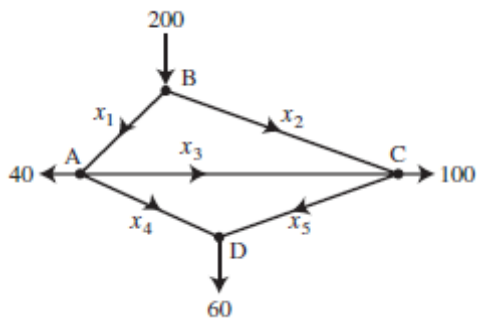
$$\begin{array}{ll} z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i & (2) & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i & & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 & \\ (-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i & & 3x_1 + x_3 = 0 & \end{array}$$

$$\mathbf{F} = \square, \mathbf{F} = \square$$

$$\mathbf{F} = \square_5$$

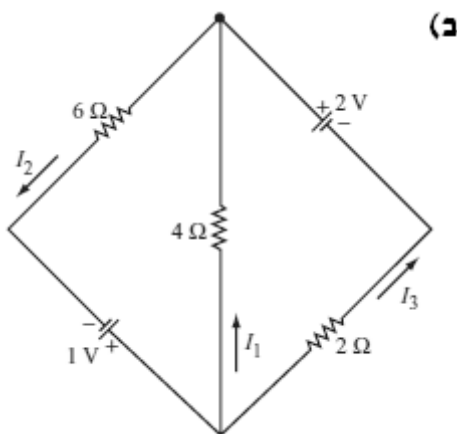
$$(12) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.  
 ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.  
 ג. מצא לאילו ערכי  $k$  יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.  
 ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.  
 ה. מצא לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון שבו  $z = 0$ .  
 ו. מצא לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון יחיד שבו  $z = 0$ .  
 ז. מצא עבור איזה ערך של  $k$  פתרון של המשוואה השלישית הוא  $(1, 2, 3)$ . האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.  
 ח. מצא לאיזה ערך של  $k$ , הוא הפתרון היחיד של המערכת.

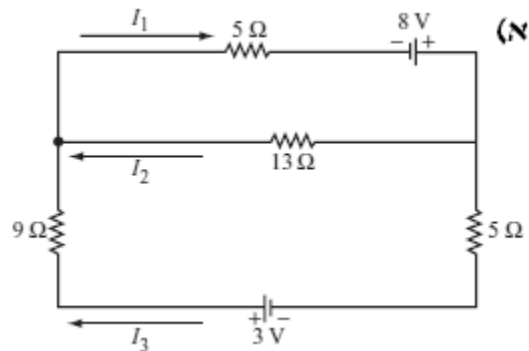


- (13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.  
 א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.  
 ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו  $x_4$  סגור.  
 ג. מהו הערך המינימלי של  $x_1$  אם ידוע ש-  $x_4 = 0$ .

(14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):



(ב)



\* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

### תשובות:



(1) (1) ו-3 שקולות ו-2 (4) שקולות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{(4)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1 \quad (2) \quad R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad (2) \quad R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad (1) \quad (4)$$

(5) ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$F=\square \qquad F=\square$

(6)

$$(x, y) = (5 - 2t, t) \quad (2)$$

$$(x, y) = (1, 2) \quad (1)$$

$$\phi \quad (4)$$

$$\phi \quad (3)$$

$$(x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (6)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (5)$$

$$\phi \quad (8)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (7)$$

$$(x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (10)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t\right) \quad (9)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (12)$$

$$\phi \quad (11)$$

א(1)  $k = 1$  . ב  $k \neq 1, k \neq -2$  . ג  $k = -2$  . ד  $k = -2$  . א(2)  $k \neq 1, k \neq -2$  . ב  $k = -2$  . ג  $k = -2$  . ד  $k = -2$  . א(7)

א(3)  $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$  . ב  $k = \frac{4}{7}$  . ג  $k = -1$  . ד  $k = -1$  . א(4)  $k = 1, k = -0.4$  . ב  $k \neq 1, k \neq -0.4$  . ג  $k = -1$  . ד  $k = -1$  . א(5)

א(6)  $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$  . ב  $k = \pm 1, k = -2$  . ג  $k \neq \pm 1, k \neq -2$  . ד  $k = \pm 1, k = -2$  . א(8)

א(9)  $k = -1$  . ב  $k \neq \pm 1$  . ג  $k = 1$  . ד  $k = 1$  . א(3)  $k \neq 3$  . ב  $k = 3$  . ג  $k = 3$  . ד  $k = 3$  . א(1)  $k = -1$  . ב  $k \neq \pm 1$  . ג  $k = 1$  . ד  $k = 1$  . א(8)

(9)

א(1)  $a = 2, b = -3$  . ב  $a = 2, b \neq -3$  . ג  $a = 2, b = -3$  . ד  $a = 2, b = -3$  . א(1)

$$. a = -6, b = 2.5 \text{ ג. } a \neq -6 \text{ או } b \neq 2.5 \text{ ב. (2)}$$

$$. a \neq 2 \text{ או } a = 2, b = 2 \text{ ג. } a = 2, b \neq 2 \text{ ב. (3)}$$

$$b = 0, c = 1.5, d = 3 \text{ ב. } ab + 2c \neq d \text{ א. (10)}$$

(11)

$$(z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1), (z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)^t + 1+i, 3t) \quad (2) \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 0) \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix} \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ א. (12)}$$

$$k = 2 \text{ ב. } k = -1 \text{ ג. } k \neq 2, k \neq -1 \text{ א. (1)}$$

$$(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t) \text{ ד.}$$

$$k = -2 \text{ ה. } k = \pm 2 \text{ ו. } k = -2 \text{ ז. } k = 2 \text{ ח. } k = -2 \text{ ט.}$$

$$. x_4 = 60 - x_5, x_2 = 100 - x_3 + x_5, x_1 = 100 + x_3 - x_5 \text{ חופשיים. (13)}$$

$$. x_5 = 60, x_4 = 0, x_2 = 160 - x_3, x_1 = 40 + x_3 \text{ חופשי. } x_3 \text{ חופשי.}$$

ג. 40

$$I_1 = -\frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11} \text{ ב. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317} \text{ א. (14)}$$

## פרק 2 - מטריצות

(1) נתונות מטריצות:  $A_{4 \times 6}, B_{4 \times 6}, C_{6 \times 2}, D_{4 \times 2}, E_{6 \times 4}$ .

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר

לפתרון מלא בסרטון היכנסו ל- [www.Gool.co.il](http://www.Gool.co.il)

כתב ופתר - גיא סלומון ©

המטריצה.

$$\begin{array}{llllll}
 B+AB & (5) & AE-B & (4) & AC-D & (3) & AB & (2) & A+B & (1) \\
 E(B-A) & (10) & E(AC) & (9) & E^T B & (8) & (E+A^T)D & (7) & E(B+A) & (6)
 \end{array}$$

(2) מצא את  $x, y, z$ , אם ידוע כי :

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן) :

$$\begin{array}{llllll}
 2tr(D^2 - 2E) & (5) & 2D+4EI_3 & (4) & 5C & (3) & E-D+I_3 & (2) & E+D & (1) \\
 DABC & (10) & tr(C^T C) & (9) & I_2 BC & (8) & \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C & (7) & 4C^T + A & (6)
 \end{array}$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות  $A$ ,  $\underline{x}$  ו- $\underline{b}$  המבטאות את מערכת המשוואותהנתונה ע"י המשוואה היחידה  $A\underline{x} = \underline{b}$ .

$$\begin{array}{ll}
 2x-3y+z+t=1 & (2) \quad 2x+y-z=3 & (1) \\
 4x+y+2z=4 & & x+2y-4z=5 \\
 y+z+t=1 & & 6x+4y+z=2 \\
 x-4z-2y=10 & & 
 \end{array}$$

(5) נתון :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות לינאריות:

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (5) \quad A\underline{x} = \underline{x} \quad (4) \quad A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (3) \quad A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (2) \quad A\underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

(6) מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא סימטרית אם  $A^T = A$  ואנטי-סימטרית אם  $A^T = -A$ .

א. ידוע ש- $A$  מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון:

1.  $AA^T$  סימטרית. 2.  $A + A^T$  סימטרית. 3.  $A - A^T$  אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- $A$  ו- $B$  אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון:

1.  $BABABA$  אנטי-סימטרית. 2.  $A^2 - B^2$  סימטרית. 3.  $A^2 + B$  סימטרית.

ג. ידוע ש- $A$  ו- $B$  סימטריות מאותו סדר ונתון כי  $AB = -BA$ . מי מבין הבאים נכון:

1.  $AB^3$  אנטי-סימטרית. 2.  $AB^2$  סימטרית. 3.  $(A - B)^2$  סימטרית.

ד. ידוע ש- $A$  סימטרית ו- $B$  אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי  $AB = BA$ . הוכח:

1.  $AB$  אנטי-סימטרית. 2.  $AB + B$  אנטי-סימטרית.

ה. נתון:  $A, B, AB$  סימטריות מאותו סדר. הוכח כי  $A^4 B^4 = B^4 A^4$ .

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה הבאה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix}$$

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה הבאה איננה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z + 4t &= 1 & (2) & & 2x - y + z &= 3 & (1) \\ x + 2y - z &= 0 & & & 3x - 2y + 2z &= 5 \\ y + z + t &= 1 & & & 5x - 3y + 4z &= 11 \\ x + 3y - z - 2t &= 0 & & & & & \end{aligned}$$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר  $n$  וחלף את  $X$ :

$$\begin{aligned} P^{-1}X^T P &= A & (3) & & A^{-1}XC &= A^{-1}DC & (2) & & AXC &= D & (1) \\ ABC^T X^{-1}BA^T C &= AB^T & (6) & & (A - AX)^{-1} &= X^{-1}C & (5) & & C^{-1}(A + X)D^{-2} &= I & (4) \end{aligned}$$

ב. נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ . חשב את  $X$  אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

ג. נתון  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . חשב את  $Y$  אם ידוע כי  $BYB^T = B^{-1} + B$ .

ד. נתון  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ . חשב את  $B$  אם נתון  $5A^T B (I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$ .

(11) א. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^2 - 5A - 2I = 0$ .

הוכח:  $A$  הפיכה ובטא את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

ב. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $(A-3I)(A+2I) = 0$ .

הוכח:  $A$  הפיכה ובטא את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$$

1. חשב את  $p(A)$ .

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- $A$  והפיכה ובטא את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$

ו- $I$  בלבד.

(12) נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^4 = 0$ .

א. הוכח כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה  $I - A$  הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

$$(13) \text{ נתון: } \begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases} \text{ הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה } D \text{ כך ש- } D^{-1}AD = C$$

\* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

\*\* לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$  אז  $A$  דומה ל- $C$  (כלומר יחס הדימיון

הוא יחס טרנזיטיבי).

### הערה

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

### תשובות:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \times 2 & 3 \\ 6 \times 6 & 10 & 6 \times 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \times 6 & 1 \\ 8 & 6 \times 2 & 7 & 6 \times 6 & 6 \end{pmatrix} \quad (1) \quad (2)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}^{(4)} \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}^{(8)} \begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}^{(7)} \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}^{(6)} \quad 230 \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}^{(10)} \quad 63 \quad (9)$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1 \quad (3) \quad -2y + 4z = 1 \quad (2) \quad 4x - 2y + 4z = 1 \quad (1) \quad (5)$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad x - 5y + z = 2 \quad x - y + z = 2$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3 \quad x - 6y - z = 3 \quad x - 6y + 3z = 3$$

$$2x + y + z = 3 \quad (5) \quad 3x - 2y + 4z = 0 \quad (4)$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad x - 2y + z = 0$$

$$4x + y + z = 9 \quad x - 6y + 2z = 0$$

$$1, 2, 3 \text{ ג. } 2 \text{ ב. } 1, 2, 3 \text{ א. } (6)$$

(7)



$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1) \\
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6) & \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) & \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4) \\
 & \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9) & \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$k=1, k=-4 \quad (2) \quad . \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad (1) \quad (8)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (2) \quad . \quad (x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (1) \quad (9)$$

$$. \quad CD^2 - A \quad .4 \quad . \quad (P^{-1})^T A^T P^T \quad .3 \quad . \quad D \quad .2 \quad . \quad A^{-1}DC^{-1} \quad .1 \quad . \quad \aleph \quad (10)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad .6 \quad . \quad (A+C^{-1})^{-1} A \quad .5$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad .\tau \quad Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad .\lambda \quad X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .\beta$$

$$. \quad A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad .\beta \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad .\aleph \quad (11)$$

$$. \quad B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad .2 \quad , \quad f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .1 \quad .\lambda$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad .\beta \quad (12)$$

### פרק 3 - דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{(11)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(10)}$$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$(5) \text{ נתון: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4. \text{ חשב:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}^{(2)} \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}^{(1)}$$

$$(6) \text{ א. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{ב. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר  $n$ . חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (3) \quad a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix} (6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} (5) \quad a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{אחרת} \end{cases} \quad (4)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases} \quad (*7)$$

\* בסעיף 7: א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי  $a=3, b=1, c=2$  ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר  $n=20$ .

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים:  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|A|=4, |B|=2$ . חשב:

$$|-2A^2 A^T \text{adj} B| \quad (4) \quad |-A^{-2} B^T A^3| \quad (3) \quad |4A^2 B^3| \quad (2) \quad |ABA^{-1} B^T| \quad (1)$$

(10) א. נתון:  $(PQ)^{-1} APQ = B$  הוכח:  $|A|=|B|$ .

ב. נתונים:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 4,  $2AB+3I=0$ ,  $|A|=2$ .

חשב את  $|B|$ .

ג. נתונים:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 3,  $B^2 - 2A^{-1} = 0$ ,  $A+3B=0$ .

חשב את:  $|A|, |B|$ .

$$\text{ד. הוכח: 1. } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad 2. |adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$$

ה. נתון כי  $A$  מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A| = 0$ .

ו. נתונים:  $A$  מטריצה מסדר  $n$ ,  $|A| = 128$ ,  $2AB = B^T A^2$ , מצא את  $n$ .

$$\text{ז. נתונים: } \det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}, \det(A_{n \times n}) = 2, \text{ חשב: } \det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$$

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 & & \\ 2x + 5y + 44z = 51 & & & & \end{array}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{l} kx + y + z + t + r = 1 \\ x + ky + z + t + r = 1 \\ x + y + kz + t + r = 1 \\ x + y + z + kt + r = 1 \\ x + y + z + t + kr = 1 \end{array}$$

א. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{2}$ ?

ג. האם קיים  $k$  עבורו למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{5}$ ?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח  $x = y = z = t = r$ .

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית  $adj(A)$  ובעזרתה את  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(14) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב: (1)  $(adjA)_{1,5}$  (2)  $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם  $|A|=1$  וכל איברי  $A$  הם מספרים שלמים, אזי כל איברי  $A^{-1}$  הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש- $A$  מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- $A^{-1}$  משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- $A$  הפיכה. הוכח שגם  $adj(A)$  וגם  $A^T$  הפיכות.

ד. נתון:  $A, B$  הפיכות.  $C, D$  לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: (1)  $C+D$  (2)  $A+B$  (3)  $AD$  (4)  $CD$  (5)  $AB$ ?

(16) מצא את ערכי  $k$  עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודה:

$$1. (0,0), (5,2), (6,5), (11,6) \quad 2. (-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$$

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו:  $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$ .

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות:  $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$ .

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו:  $(1,2), (3,4), (5,8)$ .

הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

**תשובות:**

9 (10)  $ad - bc$  (1) (1) .29 (2) .-1 (3) .-1 (4) .-1 (5) .-3 (6) .-14 (7) .24 (8) .234 (9) .-300 (10)

.6 (11) (2) .0 (1) .0 (2) .3 (3) .24 (4) .44 (5) .104 (6) (3) .120 (1) .114 (2) (3) .6

(5) (1) .-8 (2) .16 (3) .9 (7) (1)  $n!$  (2)  $(-1)^{n-1} n!$  (3)  $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

(4)  $2 \cdot 3^{n-2}$  (6) .1 (5)  $(a-b)^{n-1} [a+(n-1)b]$

(7)  $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$ ,  $D_2 = a^2 - bc$ ,  $D_3 = a^3 - 2abc$  .א

ב.1.  $D_n = 2^{n+1} - 1$  .2.  $D_{20} = 2^{21} - 1$  (8) .0 (9) (1) .4 (2)  $2^{13}$  (3) .-8 (4)  $-2^{11}$

(10) ב.  $81/32$  .ג.  $|A|=18$ ,  $|B|=-2/3$  .ד.  $4^n$  (11) (1)  $x=1$ ,  $y=2$

(2)  $x=1$ ,  $y=1$ ,  $z=2$  (3)  $x=y=z=t=1$  (12) .א.  $k \neq 1$ ,  $k \neq -4$  .ב.  $k = -2$

ג. לא.

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (1) \text{ (13)}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(14) (1) .240 (2) .0.5 (15) (1) לא (2) לא (3) לא (4) לא (5) כן. (16)  $k = 0$

(17) א.1. .13 .א.2. .14 .ב. 22 .ג.  $3x - y + 4z + 2 = 0$  .ד. 2

## פרק 4 - משוואות מסדר ראשון

### פרק 4.1 - משוואות הניתנות להפרדת משתנים

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (2)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (3)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (4)$$

$$y(2) = 1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (5)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (6)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (7)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (9)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (10)$$

$$y(0) = 4 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (11)$$

#### תשובות:

$$(1) y = \pm\sqrt{x^2 + k} \quad (2) y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (3) y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, y = 0$$

$$(4) \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (5) \frac{1}{4}\ln|y| = \ln|x-1| \quad (6) \ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5$$

$$(7) \frac{x^2}{2} + x = \frac{y^2}{2} + c, y = -2 \quad (8) y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (9) x = 1 + \tan(t + c)$$

$$(10) y = -\frac{1}{\cos x} \quad (11) \ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (12) \frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5$$



### פרק 4.2 - משוואות הומוגניות

(1) הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.

(2) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2 dy = 0 \quad (3)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (4)$$

$$y^2 + x^2 y' = xy y' \quad (5)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (6)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (7)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}} \quad (8)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (9)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (10)$$

$$(11) \text{ נתונה המשוואה } (y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 .$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$  על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $n$  שמצאת בסעיף א.

**תשובות:**

$$(3) -\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, y = -\frac{x}{2^{1/3}}$$

$$(4) \ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, y = x, y = -3x$$

$$(5) -\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, y = 0$$

$$(6) -\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, y = 0, y = -2x$$

$$(7) \ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (8) \ln\left(1 + e^{(x/y)^2}\right) = \ln|y| + c, y = 0 \quad (9) \ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

$$(10) \ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, x(t) = 0, x(t) = t$$

$$(11) n = 1, \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln\left(1 + 2(x/y)^2\right) + c$$

פרק 4.3 - משוואות מהצורה  $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

(1) הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה  $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{2+x+y} \quad (2)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (5)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (6)$$

תשובות:

$$(2) \quad x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5$$

$$(3) \quad 0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k$$

$$(4) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1$$

$$(5) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} - 2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} + 2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c,$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$(6) \quad \ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2 + 2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c$$

### פרק 4.4 - משוואות מדויקות

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה  
פתור את המשוואות הבאות:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (3)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0 \quad (4)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (5)$$

$$\left( y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left( \frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (6)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (7)$$

(8) נתונה המשוואה  $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$  באשר  $k$  קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$  על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $k$  שמצאת בסעיף א.

### תשובות:

$$(2) 0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (3) e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (4) y \sin x + x^2 e^y - y = c$$

$$(5) x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (6) \ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c$$

$$(7) x^2t^2 - 2x^3t + x^4 = c \quad (8) k = 1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c$$

### פרק 4.5 - הפיכת משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת (גורם אינטגרציה)

(1) הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת.

(2) הראה שהמשוואה  $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$  אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $\frac{1}{xy^3}$ .

(3) הראה שהמשוואה  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$

אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $ye^x$ .

(4) הראה שהמשוואה  $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$  אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם אינטגרציה  $xe^x$ .

(5) פתור את המשוואה  $(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0$ .

(6) פתור את המשוואה  $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0$ .

(7) פתור את המשוואה  $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$ .

(8) פתור את המשוואה  $(y^2 - y)dx + xdy = 0$ .

(9) פתור את המשוואה  $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$ .

(10) פתור את המשוואה  $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$ .

**תשובות:**

$$(2) 0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (3) e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (4) \sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c$$

$$(5) 0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (6) \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (7) x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c$$

$$(8) x - \frac{x}{y} = c \quad (9) -\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (10) -\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3}$$

### פרק 4.6 - משוואה לינארית

(1) הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (2)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (3)$$

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (4)$$

$$x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (5)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (7)$$

$$y' - 2y \cot x = 1 \quad (8)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2 z' + 2xz = \cos x \quad (9)$$

### תשובות:

$$(2) y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (3) y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (4) y = (x-2) [x^2 - 4x + C]$$

$$(5) y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (6) y = 2t + e^{-t} \quad (7) y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C]$$

$$(8) y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (9) z = \frac{\sin x}{x^2}$$

### פרק 4.7 - משוואת ברנולי

(1) הגדר את משוואת ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (2)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (3)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (4)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (5)$$

$$z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (6)$$

#### תשובות:

$$(2) y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}}$$

$$(3) y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (4) y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (5) y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e}$$

$$(6) z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}}$$



### פרק 4.8 - משוואת ריקטי

(1) הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (2)$$

$$y' = -(1 + x + x^2) - (2x + 1)y - y^2 \quad (3)$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad (4)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (5)$$

#### תשובות:

$$(2) \quad y(x) = -x + \frac{1}{1 + Ce^x} \quad (3) \quad y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$$

$$(4) \quad y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (5) \quad y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x}$$

### פרק 4.9 - משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

#### הערה

$$. p = y' = \frac{dy}{dx} \text{ בתת-פרק זה מסמנים}$$

(1) הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (3)$$

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (4)$$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad (5)$$

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (6)$$

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (7)$$

#### תשובות:

$$(2) (y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0$$

$$(3) (\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0$$

$$(4) (y + 0.5x - \frac{c_1}{x}) \cdot (\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2) = 0, \quad x > 0 \quad (5) \quad y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (7) \quad 6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0$$

## פרק 5 - משוואות לינאריות מסדר שני

### פרק 5.1 - משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה)

(1) הגדר משוואה חסרה מדר שני והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$y'' \tan x - 1 = y' \quad (3)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (4)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (5)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (6)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (7)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (8)$$

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1 \quad (9)$$

#### תשובות:

$$(2) \quad y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (3) \quad y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2$$

$$(4) \quad y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2 ; \quad y = \pm x + C_3$$

$$(5) \quad y = C_1(x \ln x - x) + C_2 ; \quad y = C_3 \quad (6) \quad y = e^x(x-1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$(7) \quad \frac{y^2}{2} = cx + k ; \quad y = c \quad (8) \quad y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2(x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (9) \quad \cot y = -(cx+k) ; \quad y = c$$

**פרק 5.2 - משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים**

(1) הגדר משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' - 100y = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (3)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (4)$$

$$z(0) = 1, z'(0) = 1 ; 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (5)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (6)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (8)$$

$$y'' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 ; y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (10)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (11)$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (3) y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (4) y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (5) z = e^x$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (7) x(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 t e^{-t/2} \quad (8) y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (10) y = e^2 \sin 3x \quad (11) y = e^{-4x/5} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5} x \right) \right]$$

**פרק 5.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים -**

**השוואת מקדמים**

(1) הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 16x^2 \quad (2)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 7; y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (3)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (4)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (5)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (8)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (9)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (10)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (11)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (12)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (13)$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (3) y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$$

$$(4) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (5) y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$$

$$(6) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (7) c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3x e^x + 2e^{3x} \quad (9) z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

$$(10) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x \quad (11) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$$

$$(12) x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + t e^{-2t} \quad (13) y = e^{-x} \sin 2x$$

**פרק 5.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים -**

**וריאציית פרמטרים**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת וריאצית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (2)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (3)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0; \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (5)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (6)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (7)$$

**תשובות:**

$$(2) \quad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x|$$

$$(3) \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-x} [\ln x - 1]$$

$$(4) \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}]$$

$$(5) \quad y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0)$$

$$(6) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})]$$

$$(7) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x$$

**פרק 5.5 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים -**

**שיטה אופרטורית**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (2)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (3)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (4)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (5)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (6)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3 \sin x \quad (7)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2 \cos x \cos 2x \quad (8)$$

$$(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x) \quad \text{הערת סימון}$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (3) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1$$

$$(4) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (5) y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$$

$$(6) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (7) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$$

## פרק 6 - משוואות לינאריות מסדר n

### פרק 6.1 - משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

- (1) הגדר משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.
- (2) הקושי העיקרי בפתרון משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים הוא בפתרון המשוואה האופיינית. צטט מספר משפטים מתחום האלגברה שבעזרתם נוכל לפתור את המשוואה האופיינית ביתר קלות.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (4)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (5)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (8)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (10)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (11)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (12)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (13)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (14)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (15)$$

$$y(0) = 3, y'(0) = 4, y''(0) = -1; y''' - y'' + y' - y = 0 \quad (16)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 5, y''(0) = -19, y'''(0) = -47; y'''' - 3y'''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \quad (17)$$

(18) נתונה מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6 אשר אחד הפתרונות שלה הוא



. א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה ב. מצא את המד"ר.  $x^2 e^x \cos 2x$

**תשובות:**

$$(3) y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$$

$$(4) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x}$$

$$(5) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$$

$$(7) y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (8) y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x]$$

$$(9) y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right)$$

$$(10) y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x$$

$$(11) y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x}$$

$$(12) y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x]$$

$$(13) y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$$

$$(14) y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x$$

$$(15) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x}$$

$$(16) y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (17) y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x$$

$$(18) (a) y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x]$$

$$(b) y'''' - 6y'''' + 27y''' - 68y'' + 135y' - 150y = 0$$

**פרק 6.2 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - השוואת**

**מקדמים**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2 \sin x - 4 \cos x \quad (2)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (3)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (4)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (5)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (6)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = 2 ; y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \quad (7)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x \quad (8)$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (3) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x}$$

$$(4) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (5) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (7) y = -4.5 + 4e^{-x} + 2x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$(8) y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x$$

**פרק 6.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - וריאציית**

**פרמטרים**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטת וריאציית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (3)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

**תשובות:**

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x|$$

$$(3) \quad y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left( -\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right)$$

$$(4) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln|x|$$

**פרק 6.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - שיטות**

**קצרות/אופרטוריות**

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (2)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (3)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (4)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (5)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104 \sin(2x + 1) + \cos(x + 10) \quad (6)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5 \sin 2x \quad (7)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 48 \cos^2 x - 16 \quad (8)$$

**תשובות:**

$$(2) y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} - e^x + e^{-2x}$$

$$(3) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + \frac{5}{81} e^{4x} - \frac{1}{18} x e^x - \frac{1}{30}$$

$$(4) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} + 5x^2 e^x + 2x^2 e^{2x}$$

$$(5) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} - \frac{1}{3} x^4 e^x + x e^{4x}$$

$$(6) y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{3x} + c_6 e^{-3x} - 2 \sin(2x + 1) - \cos(x + 10)$$

$$(7) y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} + \frac{1}{500} [4 \sin 2x - 22 \cos 2x]$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \frac{5 \sin x + 25 \cos x}{26} + \frac{-3 \cos 2x - 18 \sin 2x}{37} + 1$$

## פרק 7 - מערכת משוואות לינאריות

### פרק 7.1 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון מטריצות

עבור כל אחת מהמטריצות הבאות מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

#### תשובות:

- (1)  $x=0, x=1, x=2, v_{x=0} = (-1, 0, 1), v_{x=1} = (0, 1, 0), v_{x=2} = (1, 0, 1)$
- (2)  $x=6, x=2, x=-4, v_{x=6} = (0, 0, 1), v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=-4} = (-1, 1, 0)$
- (3)  $x_1=2, x_2=3, x_3=3, v_{x=2} = (1, 1, 1), v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), x_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0)$
- (4)  $x=1, x=3, x=-2, v_{x=1} = (-1, 4, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=-2} = (-1, 1, 1)$
- (5)  $x=1, x=4, x=-1, v_{x=1} = (1, -2, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=-1} = (-1, 0, 1)$
- (6)  $x=-1, x=3, v_{x=-1} = (-1, 2), v_{x=3} = (1, 2)$
- (7)  $x_{1,2} = 1 \pm 2i, v_{x=1+2i} = (1+i, 2), v_{x=1-2i} = (1-i, 2)$
- (8)  $x=1, x=1+\sqrt{3}i, x=1-\sqrt{3}i, v_{x=1} = (1, 1, 1)$   
 $v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$

**פרק 7.2 - מערכת מסדר ראשון, הומוגנית, במקדמים קבועים - שיטת הליכסון**

1) הסבר כיצד פותרים מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, במקדמים קבועים בשיטת הליכסון.

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad \text{פתור} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{פתור} \quad (3)$$

$$\underline{z}(t) = y(t) \quad \text{נתון} \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{כך ש-} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad \text{פתור} \quad (5)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad \text{פתור} \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} : \text{חשב} \quad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{כך ש-} \underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \quad \text{נתון} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{פתור} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{פתור} \quad \vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t) \quad \text{כאשר} \quad (9)$$

• הערה: בשאלות 8,9 יש להגיע מהפתרון המרוכב לפתרון ממשי.

**תשובות:**

$$(2) \underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3) \underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(5) \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6) \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(7) 0 \quad (8) \underline{x}(t) = c_1 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[ \cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$(9) \underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[ \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_3 e^t \left[ \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

**פרק 7.3 - מערכת מסדר ראשון, לא הומוגנית, במקדמים קבועים - וריאציית**

**הפרמטרים**

(1) הסבר כיצד פותרים מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, במקדמים קבועים בשיטת וריאציית הפרמטרים.

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{aligned} \quad (3)$$

(a קבוע).

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z + e^t \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= 2x + y + z + e^t \end{aligned} \quad (5)$$

(6) המר את המשוואה  $y''' + y'' - 2y = t^2$  במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.



**תשובות:**

$$(2) \underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$(3) \underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (a = -1),$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} \quad (a \neq 1)$$

$$(4) \underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3} t e^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9} e^t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

**פרק 7.4 - מערכת לא הומוגנית במקדמים קבועים - שיטת החילוף**

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$z(0) = y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{בהינתן} \quad \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

**תשובות:**

$$(1) \quad z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l$$

$$(2) \quad z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

$$(3) \quad x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t}$$

$$(4) \quad x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t$$

$$(5) \quad z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x$$

## פרק 8 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

- א. מצא מטריצה אופיינית.
- ב. מצא פולינום אופייני.
- ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצא וקטורים עצמיים.
- ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה  $P$  כך ש-  $P^{-1}AP = D$ , באשר  $D$  מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב  $A^{2009}$ .
- ט. מצא את הפולינום המינימלי.
- י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו-  $I$  בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\boxed{F = C, F = R}$$

$$\boxed{F = C, F = R}$$

\* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל  $C$  ופעם מעל  $R$ .

- (2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.
- ב. ידוע ש-  $A$  ו-  $B$  מטריצות דומות. הוכח כי:
  1.  $|A| = |B|$
  2.  $tr(A) = tr(B)$
  3. ל-  $A$  ו-  $B$  אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם  $P^{-1}AP = B$  אז  $A^n = PB^nP^{-1}$ .

**פרק 9 – מרחבי מכפלה פנימית ומרחביים נורמיים**

פרק זה נדרש ללמוד ע"פ הסרטונים בלבד.

---

## פרק 10 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים

### עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$  באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של  $f$ .

$$. \quad x, y \geq 0 \quad \text{הנח כי} \quad f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \quad \text{נגדיר}$$

שרטט את העקומות שוות הערך  $f(x, y) = 4, 12$  עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של  $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,  $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$

(3)

תהי  $y \geq 0, x \geq 0, u(x, y) = (x + p)(y + q)$  פונקצית תועלת של פרט. הנקודות  $(1, 6), (3, 2), (0, 14)$  מונחות על אותה עקומת אדישות. מצא את  $p$  ו- $q$ . הצב אותם בפונקצית התועלת. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- $R^3$  :  $T = \{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$

א. האם  $T$  בסיס ל- $R^3$ .

ב. מצא קבוצה  $T'$ , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- $T$ .

ג. השלם את  $T'$  לבסיס של

**פרק 11 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים**

**גיאומטריים**

**פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות**

- (1) מצא את  $y'$  כאשר  $x^2 + y^5 = xy + 1$ . חשב את  $y'(0)$ .
- (2) מצא את  $y'(1)$  כאשר  $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$ .
- (3) מצא את  $y'(e)$ ,  $y''(e)$  כאשר  $2\ln x + \ln y = 1$ .
- (4) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$ .  
חשב את:  $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ .
- (5) נתון  $(y = y(x, z) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$ .  
חשב את  $y_x(0,0)$ ,  $y_z(0,0)$ .
- (6) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^3 - 2xz + y = 0$ . מצא  $z_{xx}(1,1)$ .
- (7) נתונה משוואה  $z^3 - 3xyz = 4$  ונקודה  $(2, 1, -2)$ .
- מצא: (1)  $z_{xx}(2,1)$  (2)  $z_{xy}(2,1)$  (3)  $z_{yy}(2,1)$ .
- (8) אם  $u^2 - v = 3x + y$ ,  $u - 2v^2 = x - 2y$ , מצא את  $u_x, v_x, u_y, v_y$ .
- (9) אם  $w = u^3 + v^3$ ,  $y = u^2 + v^2$ ,  $x = u + v$ , מצא את  $w_x, w_y$ .



**שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)**

$$(10) \text{ נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה } \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3 \text{ (} z < 0 \text{)}$$

מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה  $P$  בה  $x = -2, y = 1$ .

(11) מצא משוואה של מישור משיק למשטח  $xyz = 8$  בנקודה  $(-2, 2, -2)$  וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

$$(12) \text{ מצא מישור המשיק למשטח } x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2 \text{ המקביל למישור} \\ x + 8y + 18z = 0$$

(13) למשטח  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי. מישור זה חותך את הצירים  $x, y, z$  בנקודות  $A, B, C$  בהתאמה. נסמן  $OA + OB + OC = a$ . הוכח  $O = (0, 0, 0)$ .  
(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה.)

**פתרונות**

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (6)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (7)$$

$$u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv} \quad (8)$$

$$w_x = -3uv, w_y = 1.5(u+v) \quad (9)$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (10)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (11)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (12)$$

## פרק 12 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $-2x - 2y + z = 0$  וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק עומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

### פתרונות

- (1)  $(-0.5, 1)$  אוכף ;  $(1.5, -3)$  מינימום.  
 (2)  $(1, 2)$  מינימום ;  $(-1, -2)$  מקסימום ;  $(-1, 2)$  ,  $(1, -2)$  אוכף.  
 (3)  $(0, 0)$  אוכף ;  $(1, 1)$  מינימום.  
 (4)  $(-1, 1)$  ,  $(-1, -1)$  מינימום ;  $(1, 0)$  מקסימום ;  $(1, 1)$  ,  $(-1, 0)$  ,  $(1, -1)$  אוכף.  
 (5)  $(0, 2)$  מקסימום .  
 (6)  $(4, 4)$  מקסימום .  
 (7)  $(-0.5, 4)$  מקסימום .  
 (8) אין נקודות קריטיות.  
 (9)  $Z = 3$  ,  $Z = 4$  .  
 (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .  
 (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3, 10/3)$  .  
 (12)  $P_1 = 10\$$  ,  $P_2 = 12\$$  , רווח מקסימלי 288\$ .

## פרק 13 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

### פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר  $x + 3y = 12$ , מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה  $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$  מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר  $3x - 6y + 4 = 0$  לפרבולה

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז: מרחק הנקודה  $(x_0, y_0)$  מהישר  $ax + by + c = 0$  הוא  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

(10) מוישלה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$  והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא  $x^2 + y^2 = 13$ .

$$f(x, y) = 4x + 6y \text{ תועלת } x, y$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$ , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצור פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ . המחירים ליחידת K ו-L הם  $P_K = 2, P_L = 1$ . היצור נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$  המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצור (אל תפתור).

### פתרונות

$$\begin{array}{llll} \text{Max}(0, \pm 1) & \min(\pm 1, 0) & (2) & \text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (1) \\ \text{Max}(\pm 2, 1) & \min(\pm 2, 1) & (4) & \text{Max}(2, 3) & \min(-2, -3) & (3) \\ & \text{Max}(9, 36) & (6) & & \text{Max}(6, 2) & (5) \\ \text{Max}(\pm 1, \mp 1) & \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (8) & & (6, 2) & (7) \\ & \min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) & (10) & & 7 / \sqrt{45} & (9) \\ & \text{Max}(2, 3) & (12) & & \text{Max}(6, 2) & (11) \\ & & & \min\{2K + L\} & ; \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 & (13) \end{array}$$

## פרק 13 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי

### לגרנג')

#### פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה  $(1, 2, 2)$  ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה  $(1, 2, 2)$ .

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $-2x - 2y + z = 0$ .  
 ב. מצא נקי' על המישור  $-2x - 2y + z = 0$  שהיא הקרובה ביותר לנקי'  $(1, 2, 3)$ .  
 ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח  $z^2 = xy + 1$  הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד  $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$

$$\text{למישור } 3x + 4y + 12z = 288$$

רמז: מרחק הנקודה  $(x_0, y_0, z_0)$  מהמישור  $ax + by + cz + d = 0$  הוא

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

#### פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 1$  והמישור  $z = x + y$  לבין ראשית הצירים.

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$$

והמישור  $z = x + y$  לבין ראשית הצירים.

#### הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

**פתרונות**

- (1) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .  
 (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה  $(2, 4, 4)$  .  
 הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה  $(-2, -4, -4)$  .  
 (3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך . נקודה קרובה ביותר  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$  .  
 (4)  $(0, 0, 1)$  ,  $(0, 0, -1)$  .  
 (5) מרחק קצר ביותר  $\frac{256}{13}$  . מרחק ארוך ביותר  $\frac{320}{13}$  .  
 (6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי  $\sqrt{3}$  .  
 (7) מרחק מינימלי  $\frac{75}{17}$  . מרחק מקסימלי 10 .